

Основные уравнения теории упругости

Геометрические уравнения

Геометрические уравнения устанавливают зависимости между перемещениями и деформациями.

Три функции перемещений

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z)$$

определяют поле перемещений деформируемого тела.

Шесть компонент тензора деформаций

$$T_d = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

как функции координат x, y, z или $T_d = T_d(x, y, z)$ определяют поле деформаций.

Будем считать функции u, v, w заданными, а через них выразим деформации. Перемещения и деформации предполагаются малыми, в разложениях функций по малым величинам ограничимся линейными слагаемыми.

Около заданной точки M внутри сплошного тела мысленно плоскостями, параллельными координатным, выделим бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz (рис. 3).

Рассмотрим проекцию этого параллелепипеда на плоскость xy ($abcd$ – проекция до перемещения и деформации, $a_1b_1c_1d_1$ – проекция после перемещения и деформации), рис. 4.

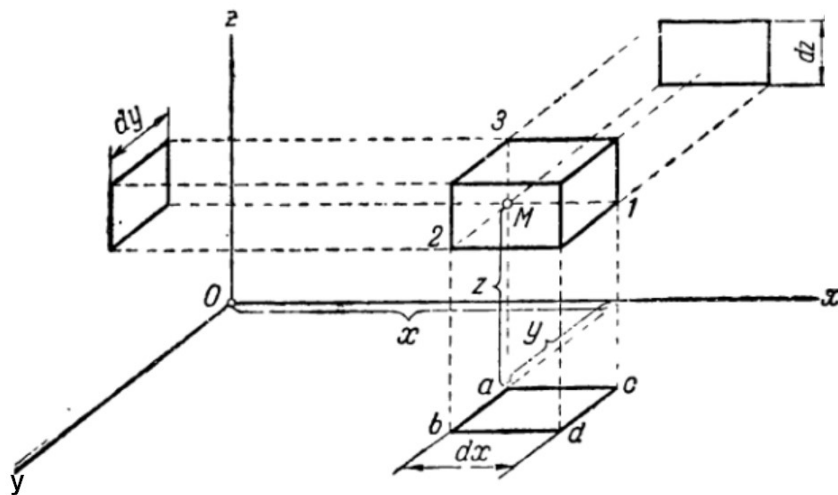


Рис. 3

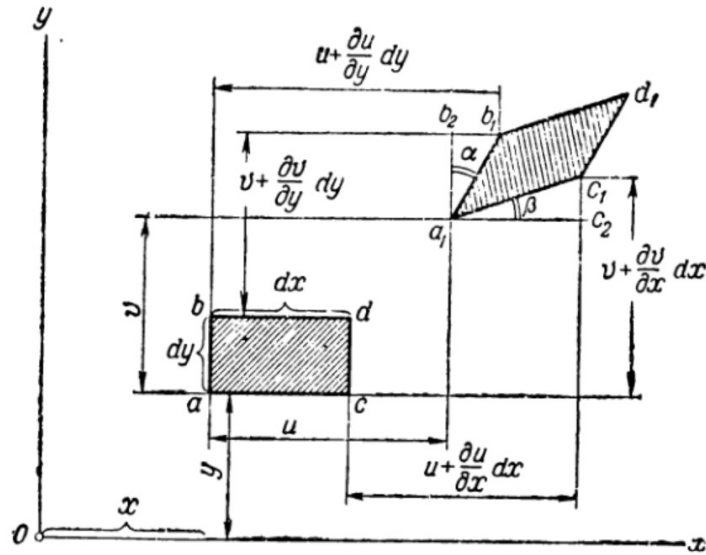


Рис. 4

На рис.4 имеем

$$u_a = u(x, y, 0) = u; \quad v_a = v(x, y, 0) = v;$$

$$u_b = u(x, y + dy, 0) = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v_b = v(x, y + dy, 0) = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy;$$

$$u_c = u(x + dx, y, 0) = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v_c = v(x + dx, y, 0) = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Из рассмотрения рис. 4 следует, что относительное удлинение ребра ac ($M1$ по рис. 3), первоначальная длина которого dx выражается (с точностью до бесконечно малых первого порядка) так:

$$\epsilon_x = \frac{a_1 c_2 - ac}{ac} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично для относительного удлинения вдоль оси Oy имеем

$$\epsilon_y = \frac{a_1 b_2 - ab}{ab} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v\right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Для угла поворота ребра ab в плоскости Oxy имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Отбрасывая в знаменателе $\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y$ как весьма малую величину по сравнению с единицей (случай конечных перемещений исключаем из рассмотрения), получаем

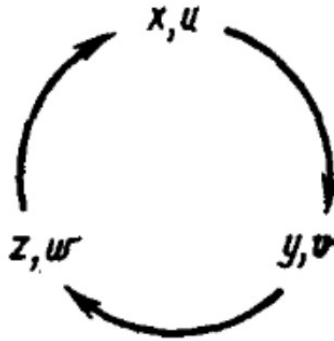
$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично для угла поворота ребра ac в той же плоскости Oxy имеем

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Итак, относительный сдвиг, т. е. искажение прямого угла bac (его уменьшение), равен

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$



При помощи круговой подстановки, не делая специальных выкладок, можно дать выражения сдвигов и в других координатных плоскостях. Таким образом, имеем следующие дифференциальные зависимости для относительных удлинений ϵ и относительных сдвигов γ :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Геометрические уравнения (4) носят название уравнений Коши.

Уравнения совместности деформаций

Если даны три компоненты непрерывного поля перемещений, то по ним легко определяются соответствующие шесть компонент поля деформаций по формулам Коши (4). Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть компонент деформаций $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}(x, y, z)$, то заранее нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются **совместными деформациями**. В противном случае деформации называются **несовместными**.

Для того чтобы деформации были совместными, они должны быть взаимосвязаны некоторыми соотношениями, которые называются **уравнениями совместности деформаций**.

Для вывода уравнений совместности исключим из уравнений Коши (4) перемещения u, v, w .

Дифференцируя первое и второе уравнения (4) и складывая их, найдем

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

Далее, составив из трех последних равенств (4) выражение $(\partial \gamma_{xy} / \partial z) - (\partial \gamma_{yz} / \partial x) + (\partial \gamma_{zx} / \partial y)$, найдем, что оно равно $2 (\partial^2 u / \partial y \partial z)$. Еще раз дифференцируя обе части этого равенства по x , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}. \quad (б)$$

Используя круговую подстановку обозначений в равенствах (a) и (б), окончательно запишем шесть уравнений совместности деформаций в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

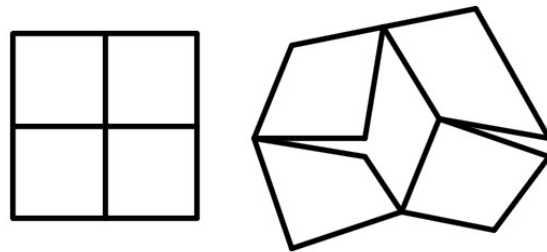
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения (5-6), выведенные Сен-Венаном, называют *уравнениями (условиями) совместности или неразрывности деформаций*.

Уравнения (5) показывают, что если заданы две линейные деформации во взаимно перпендикулярных направлениях, то угловую деформацию в плоскости этих линейных деформаций нельзя задать произвольно.

Уравнения (6) свидетельствуют о том, что если заданы три угловые деформации в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то линейные деформации не могут быть заданы произвольно.

Геометрическая интерпретация этих соотношений состоит в следующем. Представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую шестью компонентами. Если эти деформации не связаны между собою определёнными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное, но уже деформированное, твёрдое тело: в некоторых точках окажутся бесконечно малые разрывы.



Из шести уравнений (5-6) лишь три независимы. Остальные три уравнения используются для исключения лишних решений, которые могут появиться из-за того, что при их выводе выполнялось дифференцирование исходных соотношений Коши.

Для сплошных односвязных тел уравнения Сен-Венана являются необходимыми и достаточными условиями получения непрерывных и однозначных полей перемещений.